Concursul Interjudețean de Matematică „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XIX-a, Baia Mare, 14 noiembrie 2026

BAREM DE CORECTARE, CLASA A VII-A

Subiectul 1. Se consideră numerele naturale $a=3n+7, b=2n+5, c=n+2,$ unde $n\in\mathbb{N}$. Stabiliți dacă numărul $\sqrt{[a,b]+[a,c]}$ este rațional sau irațional (prin $[x,y]$ înțelegem cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y).

Soluție: Oficiu 1p

Arătăm că a,b respectiv a,c sunt prime între ele. Fie $d\in\mathbb{N}^*$ cel mai mare divizor comun a numerelor a,b

Atunci $d\mid a$ și $d\mid b\Rightarrow d\mid(2a-3b)\Rightarrow d\mid(-1)\Rightarrow d=1$ ..... 2 p

$\Rightarrow c.m.m.d.c(a,b)=1\Rightarrow [a,b]=a\cdot b$ ..... 2 p

Fie $e\in\mathbb{N}^*$ cel mai mare divizor comun a numerelor a,c

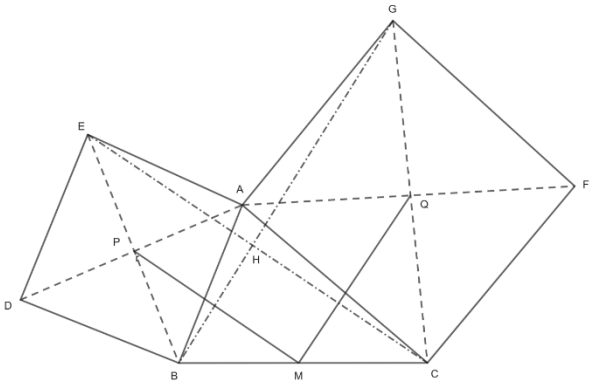
$\Rightarrow e\mid a$ și $e\mid b\Rightarrow e\mid(a-3b)\Rightarrow d\mid 1\Rightarrow d=1$ .....2 p

$\Rightarrow c.m.m.d.c(a,c)=1\Rightarrow [a,c]=a\cdot c$ .....2 p

$\Rightarrow \sqrt{[a,b]+[a,c]}=\sqrt{ab+ac}=\sqrt{a(b+c)}=\sqrt{(3n+7)(3n+7)}=(3n+7)\in\mathbb{Q}$ .....1 p

Subiectul 2. În exteriorul triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc pe laturile AB și AC pătratele de centru P și Q și mai considerăm punctul M mijlocul laturii BC. Demonstrați că triunghiul MPQ este dreptunghic isoscel.

Soluție: Oficiu 1p



PM linie mijlocie în $\Delta EBC\Rightarrow PM\parallel EC, PM=\frac{EC}{2}$

MQ linie mijlocie în $\Delta GCB\Rightarrow QM\parallel BG, QM=\frac{BG}{2}$

.....2 p

Dacă notăm

$m(\sphericalangle BAC)=\alpha^\circ\Rightarrow m(\sphericalangle EAC)=m(\sphericalangle BAG)=90^\circ+\alpha^\circ\Rightarrow$

$,\sphericalangle EAC\equiv\sphericalangle BAG, EA\equiv AB, AC\equiv AG\Rightarrow\Delta EAC\equiv\Delta BAG$

(L.U.L) $\Rightarrow EC\equiv BG\Rightarrow PM\equiv QM$ (1).....3p

De asemenea, din $\Delta EAC\equiv\Delta BAG\Rightarrow\sphericalangle AEC\equiv\sphericalangle ABG$.

Notăm $m(\sphericalangle AEC)=m(\sphericalangle ABG)=x^\circ$. Atunci

$m(\sphericalangle HEB)=m(\sphericalangle AEB)-m(\sphericalangle AEH)=45^\circ-x^\circ$, $m(\sphericalangle HBE)=m(\sphericalangle AEB)+m(\sphericalangle ABH)=45^\circ+x^\circ\Rightarrow$.....1p

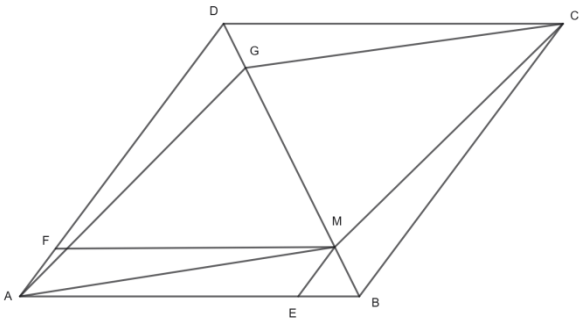
$m(\sphericalangle HEB)+m(\sphericalangle HBE)=90^\circ\Rightarrow m(\sphericalangle EHB)=90^\circ\Rightarrow$

$EC\perp BG, PM\parallel EC, QM\parallel BG\Rightarrow PM\perp QM$ (2)

Din (1) și (2) deducem că ΔMPQ este dreptunghic isoscel 3p

Subiectul 3. Fie paralelogramul $ABCD$ și punctul M situat pe diagonala BD, cu $2\cdot BM < BD$. Fie punctele $E \in AB$, $F \in AD$ și $G \in BD$ astfel încât $ME \| AD, MF \| AB, MC \| AG$ și $AB = EM + MF$. Determinați valoarea raportului dintre perimetrul triunghiului BCM și perimetrul triunghiului DGC.

Soluție: Oficiu 1p



Din $F \in AD$ și $ME \| AD \Rightarrow ME \| AF$

Din $E \in AB$ și $MF \| AB \Rightarrow MF \| AE$

Deci $AEMF$ este paralelogram, cu $MF = AE$.
Atunci $AB = AE + EB = MF + EB$ 1p
Dar $AB = EM + MF \Rightarrow EB = EM \Rightarrow \Delta EBM$ este isoscel cu $\sphericalangle EBM = \sphericalangle EMB$
.....1p

Din $ME \| AD \Rightarrow \sphericalangle EMB = \sphericalangle ADB$ (corespondente)
Se obține $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB$, deci ABD este un triunghi isoscel, cu $AB = AD$ 1p
Cum $ABCD$ este un paralelogram cu două laturi consecutive congruente, rezultă că $ABCD$ este romb 1p
Cum $\sphericalangle DAG = \sphericalangle MCB$ (unghiuri cu laturile respectiv paralele), $AD = BC$, $\sphericalangle ADG = \sphericalangle CBM$ (alterne interne)
$\Rightarrow \Delta DAG \equiv \Delta BCM (U.L.U.) \Rightarrow AG = CM$, $DG = BM$ 2p
Din $AG \| CM$ și $AG = CM$ rezultă $AMCG$ este un paralelogram cu diagonalele perpendiculare, deci patrulaterul $AMCG$ este romb 1p
Din $DG = BM$, $DC = BC$ și $GC = MC$ rezultă $\Delta BCM \equiv \Delta DCG \Rightarrow \dfrac{P_{\Delta BCM}}{P_{\Delta DCG}} = 1$ 2p

Subiectul 4. Determinați numerele naturale nenule m și n pentru care numerele $m, m+8, m+10$ și $m+n$ sunt prime, având suma o putere a lui 2 cu exponent natural, iar suma pătratelor acestor patru numere este un pătrat perfect.

Gazeta Matematică nr.4/2026

Soluție: Oficiu 1p
Cum $m+8, m+10$ sunt numere prime, deducem că m este impar
De asemenea, din m prim, m impar, deducem $m \geq 3$
Pentru $m = 3$ avem numerele prime $m = 3, m+8 = 11, m+10 = 13$ 1p
Dacă $m \geq 5$, prim, atunci m poate fi de forma $m = 6k+1, k \in \mathbb{N}^*$ sau $m = 6k+5, k \in \mathbb{N}$ 1p
Pentru $m = 6k+1, k \in \mathbb{N}^*$ obținem $m+8 = 6k+9 \vdots 3$, deci nu e prim.....1p
Pentru $m = 6k+5, k \in \mathbb{N}$ obținem $m+10 = 6k+15 \vdots 3$, deci nu e prim 1p
Prin urmare avem $m = 3$. În acest caz numerele sunt $3, 11, 13, 3+n$
Notăm $3+n = p, p \geq 5, p$ prim ($n \in \mathbb{N}^*, n$ par $n \geq 2$)
Mai trebuie să fie îndeplinite condițiile p-prim, $p \geq 5$, $3+11+13+p = 2^k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow p = 2^k - 27, k \geq 5$ și
$3^2 + 11^2 + 13^2 + p^2$ pătrat perfect, adică $299 + p^2$ pătrat perfect 1p
Dacă $p \geq 299 \Rightarrow p^2 < p^2 + 299 \leq p^2 + p = p(p+1) \leq (p+1)^2 \Rightarrow 299 + p^2$ nu e pătrat perfect

Din p prim, $p<299 \Rightarrow p \leq 293 \Rightarrow 2^k-27 \leq 293 \Rightarrow 2^k \leq 320 \Rightarrow k \leq 8 \Rightarrow k \in \{5,6,7,8\}$

$k=5 \Rightarrow p=5 \Rightarrow 299+25=324=18^2 \Rightarrow n=2$ 1p

$k=6 \Rightarrow p=37 \Rightarrow u\left(299+37^2\right)=8 \Rightarrow 299+37^2$ nu e pătrat perfect.....1p

$k=7 \Rightarrow p=101 \Rightarrow 299+101^2=10500=105 \cdot 10^2$ nu e pătrat perfect.....1p

$k=8 \Rightarrow p=229 \Rightarrow 299+229^2=229^2+229+70=229 \cdot 230+70=10\left(229 \cdot 23+7\right)$ care nu este divizibil cu 100 dar este divizibil cu 10, deci nu e pătrat perfect.....1p

Deci $m=3, n=2$ singura soluție a problemei

Proiect realizat cu sprijinul financiar al Consiliului Județean Maramureș